Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Daniel Palacín — Sommersemester 2020

Topologie
Blatt 7
Abgabe: 08.07.2020, 11Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**
Betrachte die linear angeordnete Menge X als topologischen Raum mit der Ordnungstopologie. Zeige, dass X sowohl ein größtes als auch ein kleinstes Element besitzt, wenn X kompakt ist.
Gilt die Rückrichtung?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ seien $K \subset Y$ beliebige Teilmengen. Zeige, dass K genau dann kompakt in X ist, wenn K kompakt in Y mit der Spurtopologie ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**
Betrachte folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{\geq 0} \\ (x, y) &\mapsto \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \end{aligned}$$

a) Zeige, dass d_1 eine Metrik auf $\mathbb{R}$ derart definiert, dass die von d_1 induzierte Topologie zu der euklidischen Topologie äquivalent ist.

Hinweis: Berechne die Ableitung der Funktion $f(t) = \frac{t}{1+t}$.

b) Zeige, dass $\mathbb{R}$ in dieser Metrik beschränkt ist. Widerspricht dies dem Satz von Heine-Borel?

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.**
Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Wir nehmen an, dass der Raum $\prod_{i \in I} X_i$ mit der Produkttopologie lokal kompakt ist.

a) Zeige, dass jeder Raum X_i lokal kompakt ist. Ferner muss für fast alle i aus I (außerhalb einer koendlichen Teilmenge der Indexmenge I) der Raum X_j kompakt sein.

b) Für welche nicht-leere Indexmengen I ist das Produkt $\prod_{i \in I} (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{euk})$ lokal kompakt?

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden (Bitte alle Namen eintragen!) Abgabe der Übungsblätter im ILIAS als eine einzige PDF-Datei.